

## 10 $\log x$ のテイラー級数

すばらしい景色を見ることができて満足だろうか。しかし、この旅にはまだ見所があるのだ。それを探しに行こう。見所は  $\log x$  の級数展開に隠れている。まず、

$$\log(x+1) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots + a_nx^n + \cdots \quad (1)$$

と仮定しよう。  $\log x$  でなく  $\log(x+1)$  としたのは訳がある。理由は一步進んでから言おう。

$\frac{d}{dx}\{\log(x+1)\} = \frac{1}{x+1}$  であるが、 $\frac{1}{x+1}$  は指数の約束から  $(x+1)^{-1}$  とも書ける。一般に  $\frac{d}{dx}\{(x+1)^n\} = n(x+1)^{n-1}$  なのだが、これは  $n < 0$  においても成立している。そこで、(1) も次々と微分することが可能になる。実際に (1) を次から次へと微分してみよう。

$$\begin{aligned} \log(x+1) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \cdots \\ \frac{1}{x+1} &= a_1 + 2 \cdot a_2x + 3 \cdot a_3x^2 + 4 \cdot a_4x^3 + 5 \cdot a_5x^4 + 6 \cdot a_6x^5 + \cdots \\ -\frac{1}{(x+1)^2} &= 2 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3x + 4 \cdot 3 \cdot a_4x^2 + 5 \cdot 4 \cdot a_5x^3 + 6 \cdot 5 \cdot a_6x^4 + \cdots \\ \frac{2}{(x+1)^3} &= 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4x + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot a_5x^2 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot a_6x^3 + \cdots \\ -\frac{2 \cdot 3}{(x+1)^4} &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_5x + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot a_6x^2 + \cdots \\ \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(x+1)^5} &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_6x + \cdots \end{aligned}$$

$\log 1 = 0$ 、 $(0+1)^n = 1$  であることに注意して、 $x = 0$  を代入してみよう。うれしいことに  $x$  の項以下はすべて消えて

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 \quad \text{より} \quad a_0 = 0 \\ 1 &= a_1 \quad \text{より} \quad a_1 = 1 \\ -1 &= 2 \cdot a_2 \quad \text{より} \quad a_2 = -\frac{1}{2} \\ 2 &= 3 \cdot 2 \cdot a_3 \quad \text{より} \quad a_3 = \frac{1}{3} \\ -2 \cdot 3 &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 \quad \text{より} \quad a_4 = -\frac{1}{4} \\ 2 \cdot 3 \cdot 4 &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_5 \quad \text{より} \quad a_5 = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

を得ることができた。これで  $\log x$  をわざわざ  $\log(x+1)$  にした理由が理解できただろう。  $\log x$  のままだと微分した左辺が  $\frac{(\text{何々})}{x^n}$  となるので、 $x = 0$  を代入できなくなってしまうのだ。

この結果を (1) に戻しておこう。

$$\log(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \cdots$$

であるから  $\log(x+1)$  が多項式で表せたことになる。

$\frac{d}{dx}\{\log(x+1)\} = \frac{1}{x+1}$  になるはずだが、そうだろうか。

$$\frac{d}{dx} \left( x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \dots \right) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

を見る限り  $\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$  のように見えないが、筆算で  $1 \div (1+x)$  をやってみるとよい。

$$\begin{array}{r}
 1 \quad -x \quad +x^2 \quad -x^3 \quad +\dots \\
 1+x \ ) \overline{1} \\
 \underline{1 \quad +x} \\
 \quad -x \\
 \quad \underline{-x \quad -x^2} \\
 \qquad \quad x^2 \\
 \qquad \quad \underline{x^2 \quad +x^3} \\
 \qquad \qquad \quad -x^3 \quad -x^4 \\
 \qquad \qquad \qquad \quad \dots
 \end{array}$$

ちゃんとあってる。さて、ここで  $x=1$  としてみよう。つまり  $\log 2$  の値をテイラー級数で計算するわけである。それは

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

となる。雰囲気は以前訪れた  $\frac{\pi}{4}$  の計算に似ている。ということは収束が遅いと思われる。

軽く PowerShell で計算してみよう。

---

[ps script]

```
PS C:\Users\Yours > $s = 0; foreach ($n in 1..10000) {$s += 1/(2*$n-1)}
PS C:\Users\Yours > foreach ($n in 1..10000) {$s -= 1/(2*$n)}
PS C:\Users\Yours > $s
0.693122181184906
```

テイラー級数は正負交互になっているが、この程度の計算に if 文を持ち出すこともない。正の項だけまとめて足し、次に負の項だけまとめて引けばよいだけだ。実際の  $\log 2$  の値は PowerShell が知っている。

---

[ps script]

```
PS C:\Users\Yours > [math]::log(2)
0.693147180559945
```

級数計算は収束が遅いことを思えば、まずまずの結果だろう。ところで、 $\log 2$  のテイラー級数の式は

$$\begin{aligned}
 \log 2 &= 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{2}\right) + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{4}\right) + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{6}\right) + \frac{1}{7} + \left(\frac{1}{8} - \frac{2}{8}\right) + \dots \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots\right) - \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{6} + \frac{2}{8} + \dots\right)
 \end{aligned}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right)$$

$$= 0?$$

と計算できないだろうか？ しかし、 $\log 2$  が 0 でないことは確かなので、上の計算は何かがおかしいことになる。計算の都合で項を入れ替えているが、これは  $\pi$  の計算でもやってきたことである。項の入れ替えが原因なら、 $\pi$  の計算も根本から見直さなくてはならないことになってしまう。

しかし、安心してほしい。円周率の計算に使った級数は**絶対収束**するので項の入れ替えをしてよい。一方、 $\log 2$  の計算に使われる級数は**条件収束**する級数なので項は入れ替えられない、ということが知られている。面白そうな話だろうが、今回の旅はここまでである。

今回の旅を終えるにあたって、`pow(a, b)` は指数関数なのに対数計算していると言ったことに触れておこう。コンピュータは基本的に加算と乗算をもとに計算するので、 $a^b$  は何らかの多項式で表しておく必要がある。そして、うまいことに  $e^x$  が多項式で表せることは見てきたとおりだ。そこで  $a^b$  を  $e^x$  にできればよいことになる。 $\log a^b = \log e^x$  を解いて  $x = \log a^b = b \log a$  だから、 $a^b = e^{b \log a}$  である。幸いにも  $\log a$  さえ多項式で表せる。つまり、 $a^b$  は加算と乗算の組み合わせで計算できるのだ。ただし、問題もある。大きなべき計算と数多くの項の和を求めるので誤差がまぎれやすい。**PowerShell** の計算結果がイマイチだったのは、たぶんこんなところだろうか。