9　オイラーの関係式

さあ、いよいよこの旅最大の景勝地にやってきた。まず私たちは

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

であることを知り、次に

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \cdots \end{aligned}$$

であることも確認している。

$\sin x$ と $\cos x$ のテイラー級数の分母は、それぞれ奇数と偶数の階乗になっている。一方、e^x のテイラー級数の分母は自然数の階乗である。$\sin x$ と $\cos x$ を混ぜると e^x っぽくなるのだが、惜しいかな符号にわずかの違いがある。微妙な差だけに e^x と $\sin x$、$\cos x$ の間には非常に近い何らかの関係があるように感じる。

どんな項が負の項になっているのだろう。x^n の係数の正負を n の値で調べてみよう。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
正負	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$\cdots$

明らかに規則がある。2 つごとに正負が交替している。ことばの説明ならばこれで十分だろうが、数式で表現するにはどうすればよいのだろう。もし、ひとつずつ交互に正負が交替していれば、数式の候補として “$\times(-1)$” を挙げればよい。それで正負が交互になる。2 つごとに正負が交替するとなると. . . 。

実は、それにちょうど良いものに旅の途中で出会っている。虚数単位 i である。i は $i^2 = -1$ なる性質をもっていたので、2 つ掛けたところで符号が変わるのだ。それなら e^x の展開式において、$x \to ix$ に置き換える手はどうだろう。おそらく符号は $\sin x$、$\cos x$ の符号と一致するはずである。実際、そのようにすると

$$e^{ix} = 1 + \frac{1}{1!}ix - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}ix^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}ix^5 - \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{7!}ix^7 + \cdots$$

となる。i が目障りなので、これを

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots\right) + i\left(\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\right)$$

と編成し直してみよう。

やったぞ。( ) の中はそれぞれ $\sin x$ と $\cos x$ のテイラー級数じゃないか。これより

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

という**オイラーの関係式**が導かれた[*1]。

さあ、この景色の向こうにさらに絶景が待ち受けている。$x=\pi$ を代入するよ！

$$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1\ .$$

だから、$e^{i\pi}=-1$ なのである。

オイラーの関係式はさらに素敵な景色を見せてくれる。両辺の n 乗を考えよう。

$$(e^{ix})^n=(\cos x+i\sin x)^n\ .$$

左辺は e^{inx} である。右辺の展開式はどうなるのだろう。だけど、ここで慌てて式の展開に走ってはいけない。ここはじっくり $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ の意味をよーく考えようじゃないか。$x=\pi$ の代入の仕方を思い出してほしい。これは、x を π に書き換えただけの話である。x は何にでも書き換えられる。だから、x を nx に書き換えて悪いことは何もないのだ。すなわち

$$e^{inx}=\cos nx+i\sin nx$$

である。慌てて展開しなくてよかったでしょう。以上の単純な考察から

$$(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx$$

が分かったのである。これは、ド・モアブルの定理と呼ばれる[*2]。

さっきは慌てて式の展開をしなかったけれど、今なら落ち着いて式の展開をする余裕がある。$n=2$ を試すと

$$\begin{aligned}(\cos x+i\sin x)^2&=\cos 2x+i\sin 2x\ \text{より}\\(\cos x)^2-(\sin x)^2+i\cdot 2\cos x\sin x&=\cos 2x+i\sin 2x\end{aligned}$$

である。実数の項と虚数の項を比較すると $(\cos x)^2-(\sin x)^2=\cos 2x$、$2\cos x\sin x=\sin 2x$ を目にできる。どこかで出会っているよね。π の旅で出会った 2 倍角の公式だ。こんなところにも宝が埋もれていたんだ。

ところで、定理を導く過程はさほど面倒ではないのに、オイラーでなくド・モアブルの名が冠されているのが不思議なところだ。数学史の書物によれば、オイラーは厳密な証明にこだわらない自由な発想で無限級数を扱っていたという。オイラーの関係式もその過程で生まれたのである。そのため、発見はオイラーが、厳密な理屈はド・モアブルが、といういきさつなのであろう。私たちの旅も同じだ。私たちは見学を中心とする旅行者である。目に見える景色の裏側を発掘することは専門家に任せよう。

[*1] Leonhard Euler (1707–1783)：スイスの数学者・物理学者。

[*2] Abraham de Moivre (1667–1754)：フランスの数学者。

さて、$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$ を鑑賞したところで、ひとつ不思議なものを見てもらおう。オイラーの関係式に今度は、$x = \dfrac{\pi}{2}$ を代入してみよう。$\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$、$\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ より $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$ を得る。この両辺を i 乗すると $(e^{\frac{\pi}{2}i})^i = i^i$ となる。ここでは、i 乗にどんな意味があるのか詮索しないでほしい。指数計算の約束を少々無茶かもしれないが、虚数単位にも当てはめてしまえば、$e^{-\frac{\pi}{2}} = i^i$ となるはずだ。

$e^{-\frac{\pi}{2}}$ の計算は **PowerShell** の守備範囲である。

[ps script]

```
PS C:\Users\Yours > ([math]::e)^(-[math]::pi/2)
0.207879576350762
```

驚くべきことに $i^i = 0.207879576350762\cdots$ なのである。