7 $\sin x$、$\cos x$ の微分

旅の回り道が過ぎると思うだろうが、あと少し薄暗い道を進んでもらうことになる。指数関数の微分に関わって、e が何であるか見えてきた。今度は sin と cos の微分について考えよう。ただし、指数関数の微分ついでにこの地を訪れるのではない。ここを通過しないと目的地へ行けないからである。

微分の定義により $\sin x$ を微分しよう。

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}\\ &= \frac{(\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x)-\sin x}{\Delta x} \quad \text{（三角関数の加法定理より）}\\ &= \frac{\sin x(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}+\frac{\cos x\sin\Delta x}{\Delta x} \quad \text{（}\sin x\text{ の項と }\cos x\text{ の項に分解）}\\ &= \sin x\cdot\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}+\cos x\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\end{aligned}$$

この旅ではおなじみの三角関数の加法定理を用いた。$\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}\to 1 \quad (\Delta x\to 0)$ であることは分かっているが、$\Delta x\to 0$ のときの $\dfrac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}$ の値は分からない。形式的に代入すると $\dfrac{0}{0}$ となって、値を定めることができないからである。この場合は、次のようにするとよい。

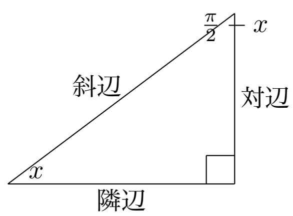
$$\begin{aligned}\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x} &= \frac{(\cos\Delta x-1)(\cos\Delta x+1)}{\Delta x(\cos\Delta x+1)} \quad \text{（分子・分母に }\cos\Delta x+1\text{ を掛けた）}\\ &= \frac{(\cos\Delta x)^2-1}{\Delta x(\cos\Delta x+1)}\\ &= \frac{-(\sin\Delta x)^2}{\Delta x(\cos\Delta x+1)} \quad \text{（三角関数の性質より）}\\ &= \frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{-\sin\Delta x}{\cos\Delta x+1}\ .\end{aligned}$$

だいぶ手間をかけたが、結局

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\sin x\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{-\sin\Delta x}{\cos\Delta x+1}+\cos x\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}$$

とすることができた。

ここで $\Delta x\to 0$ とすれば、$\dfrac{-\sin\Delta x}{\cos\Delta x+1}\to\dfrac{0}{2}=0 \quad (\Delta x\to 0)$ が分かるので、ようやく $\dfrac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$ を導くことができた。$\cos x$ に対しても同様な計算を繰り返してもよいのだが、別の視点で考えよう。同じ景色を見るにしても、違った角度から見ると新鮮だからだ。



$\cos x = \dfrac{隣辺}{斜辺}$ であるが、この比は $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ と同じことである。すなわち、$\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ がいえる。よって、$\dfrac{d}{dx}(\cos x)$ を知りたければ $\dfrac{d}{dx}\left\{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right\}$ を計算すればよいことになる。

それは $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ としたときの $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ の極限であるが、$y=\sin x$ に対する $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ の極限とは違うことに注意しなくてはならない。なぜなら、2 つの関数で x が同じ変化をしても y の変化量に違いが生じるからである。具体的には、x が $0 \to \pi$ へ変化する場合 $y=\sin x$ は $\sin 0 \to \sin\pi$ へと変化するが、$y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ は $\sin\dfrac{\pi}{2} \to -\sin\dfrac{\pi}{2}$ へと変化するからである。

それではどう考えたらよいのだろう。

もし、関数が $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ ではなく、$y=\sin u$ と書いてあったらどうだろう。この場合は $y=\sin x$ の平均変化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ と $y=\sin u$ の平均変化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}$ は同じである。なぜなら、たとえば x が $0\to\pi$ へ変化するなら、u も $0\to\pi$ へ変化させればよいからである。

しかし、実際はそうなってくれない。それは、$u=\dfrac{\pi}{2}-x$ だから Δx の変化は Δy と Δu 両方に同時に影響を与えるからだ。すなわち、Δx の変化に対する平均変化率には $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}$ と $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ があるのである。

さて、ようやく道が整備されてきた。いま私たちが知りたいのは $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ の平均変化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ である。しかし、この $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は $y=\sin x$ のそれと同等ではない。同等に扱えるのは $y=\sin u$ の $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}$ である。しかも Δu は平均変化率 $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ の影響下にあるということである。

とどのつまり、$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ が知りたいのに使えるのは $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}$ と $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ である. . . 。なんだ、パズルのピースはつながるじゃないか。$\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ を計算すれば $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ だ。

以上のことをまとめるとこうである。

$y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ に対する $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ を求めるなら、$u=\dfrac{\pi}{2}-x$ とおいた $y=\sin u$ を考えるとよい。これで $\dfrac{dy}{du}=\cos u$ とできるが、これは目的のものではない。しかし $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ でよいので、$\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=-1$ を用いれば $\Delta x\to 0$ のとき

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\cos u\cdot(-1)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

までたどり着く。

ところで $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ は何であろう。ついさっき通過した図を見ると、その比は $\sin x$ の比と同じだ。結局、$\dfrac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$ なのである。長い道のりで得た式だ。忘れないうちに記録しておこう。

□ $\sin x$、$\cos x$ **の微分**

- $\dfrac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$
- $\dfrac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$

ようやく $\sin x$ の微分が $\cos x$ であることが分かった。このことは $\sin x$ の、たとえば $x=0,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \ldots$ における接線の傾きが $\cos 0,\ \cos\dfrac{\pi}{6},\ \cos\dfrac{\pi}{3},\ \cos\dfrac{\pi}{2},\ \cos\dfrac{2}{3}\pi,\ \ldots$ であると言っているのだ。これらの値は $1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 0,\ -\dfrac{1}{2},\ \ldots$ である。なるほど $\cos x$ のカーブが目に映る。