5　e^x のマクローリン展開

$y = e^x$ は**指数関数**である。しかも、x の値が有理数なら $y = (\sqrt[n]{e})^m$ と考えて y の値を計算することもできる。実際は x が実数であっても問題ない。だから、指数関数はこれ以上いじくり回す必要がない、よくできた関数なのだ。しかし世の中には突拍子もないことを考える人はいるもので、マクローリンは e^x が x の多項式で表せないかと考えた*1。つまり

$$e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1}$$

と仮定したのである。

つい先ほど $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$ を確認したばかりなので、(1) の両辺を次から次へと微分してみよう。

$$\begin{aligned}
e^x &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + \cdots \\
e^x &= a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 + 4 \cdot a_4 x^3 + 5 \cdot a_5 x^4 + 6 \cdot a_6 x^5 + \cdots \\
e^x &= 2 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + 4 \cdot 3 \cdot a_4 x^2 + 5 \cdot 4 \cdot a_5 x^3 + 6 \cdot 5 \cdot a_6 x^4 + \cdots \\
e^x &= 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 x + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot a_5 x^2 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot a_6 x^3 + \cdots \\
e^x &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_5 x + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot a_6 x^2 + \cdots
\end{aligned}$$

$e^0 = 1$ であることに注意して、$x = 0$ を代入してみよう。すると、うれしいことに x の項以下はすべて消えて

$$\begin{aligned}
1 &= a_0 & \text{より} \quad a_0 &= 1 \\
1 &= a_1 & \text{より} \quad a_1 &= 1 \\
1 &= 2 \cdot a_2 & \text{より} \quad a_2 &= \frac{1}{2} \\
1 &= 3 \cdot 2 \cdot a_3 & \text{より} \quad a_3 &= \frac{1}{3 \cdot 2} \\
1 &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 & \text{より} \quad a_4 &= \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2}
\end{aligned}$$

を得ることができた。

次の a_5 は間違いなく $\dfrac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$ だろうと予想できる。ここで新しい記号を導入しておこう。$n! = n(n-1)(n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$ なる記号 “!” だ*2。この先、$a_n = \dfrac{1}{n(n-1)(n-2) \cdot \cdots \cdot 2}$ が予想されるので、新しい記号は強い味方になる。“×1” はあってもなくても同じだから、$\dfrac{1}{n(n-1)(n-2) \cdot \cdots \cdot 2} = \dfrac{1}{n!}$ と書くことに問題はない。すると $a_n = \dfrac{1}{n!}$ と書ける。

この結果を (1) に戻せば

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

---

*1 Colin Maclaurin (1698–1746)：スコットランドの数学者。

*2 ！は “階乗（かいじょう）” と読む。

である。驚くべきことに e^x は多項式で表せるんだ。このように関数を多項式による級数で表すことをを、**マクローリン展開**または**テイラー展開**と呼び、その結果である無限級数をマクローリン級数またはテイラー級数という[*3]。この旅では偉大な数学者 2 人に敬意を表して、マクローリン展開とテイラー級数と呼ばせてもらおう。ところで旅の途中に出会ったマクローリン展開であるが、実は重要な見学地を省いている。そこは**剰余項**と呼ばれる、少々入り組んだ場所なので案内しなかったのだ。本格的な学習を目指すなら、別のツアーで少々入り組んだ場所もしっかり見学してもらいたい。

さて、テイラー級数で示された e^x に $x=1$ を代入すると

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \cdots$$

である。これを計算すれば e の値が分かる。以前、$(1+h)^{\frac{1}{h}} \quad (h \to 0)$ を使って、**PowerShell** で e の値を求めてみたけれど、諸般の事情で近似値と呼ぶにはお粗末な結果しか出なかった。でも、この式は違う。というのは、$n!$ がものすごい速さで大きな値になるので収束が早い。収束の速さを **PowerShell** で味わっておくのも悪くないだろう。

[ps script]

```
PS C:\Users\Yours > $e = 1; $t = 1
PS C:\Users\Yours > $t /= 1; $e += $t; $e
2
PS C:\Users\Yours > $t /= 2; $e += $t; $e
2.5
PS C:\Users\Yours > $t /= 3; $e += $t; $e
2.66666666666667
PS C:\Users\Yours > $t /= 4; $e += $t; $e
2.70833333333333
PS C:\Users\Yours > $t /= 5; $e += $t; $e
2.71666666666667
PS C:\Users\Yours > $t /= 6; $e += $t; $e
2.71805555555556
PS C:\Users\Yours > $t /= 7; $e += $t; $e
2.71825396825397
```

その都度、`$t` を割る値を増やしながら`$e` に加えているだけである。**PowerShell** では、前に入力した文字列をファンクションキーやカーソルキーなどで呼び出せるので、`$t` の値だけ変えてキャリッジリターンキーを押すことを繰り返すだけでよい。それを 7 回繰り返しただけで、有効桁数 5 桁を得られる。もうしばらく機械的な作業を続けて、`$t` を割る値を `16` にしたところで、**PowerShell** が表示する有効桁数の 14 桁に達する。いまはこの程度の計算で済ますけれど、すぐ後で配列を用いて 1000 桁の e の値を計算することにしよう。

*3 Brook Taylor (1685–1731)：イギリスの数学者。

[ps script]

```
PS C:\Users\Yours > $t /= 16; $e += $t; $e
2.71828182845904
```

ようやく e の姿がはっきりしてきた。この地を離れる前に、テイラー級数で $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$ になることも確認しておこう。各項を微分するとたしかに

$$\frac{d}{dx}\left(1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{6!}x^6+\cdots\right)=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots$$

になっている。無限級数の各項を無造作に微分してよいかどうかは、本来きちんとしておくものだけれど、この格安ツアーでは細かいオプションはないのである。