4　e^x の微分

$e^{i\pi}$ を計算するために必要なことがある。それは、関数 $y = e^x$ について知ることである。$e^{i\pi}$ は、e^x における $x = i\pi$ の特別な場合であるが、全般的な考察をしておくと特別の値を求める近道になることがある。寄り道と思える行程だが、今がそのときで、急がば回れとはこのことである。

関数の変化を知る手だてに微分を使おう。e^x を微分の定義に当てはめると

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \quad (\Delta x \to 0)$$

である。ちなみに $e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1)$ になるのは、展開の公式と指数の性質から明らかだ。$\dfrac{d}{dx}(e^x)$ がどうなるかは、$\dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \quad (\Delta x \to 0)$ の極限がどうなるか分かればよい。例によって **PowerShell** に計算をしてもらうことにしよう。

[ps script]

```
PS C:\Users\Yours > @"
>> ([math]::pow([math]::e, 0.1)-1)/0.1
>> ([math]::pow([math]::e, 0.001)-1)/0.001
>> ([math]::pow([math]::e, 0.00001)-1)/0.00001
>> ([math]::pow([math]::e, 0.0000001)-1)/0.0000001
>> ([math]::pow([math]::e, 0.000000001)-1)/0.000000001
>> ([math]::pow([math]::e, 0.00000000001)-1)/0.00000000001
>> "@ > test.ps1
>>
PS C:\Users\Yours > ./test
1.05170918075648
1.00050016670838
1.00000500000696
1.00000004943368
1.00000008274037
1.00000008274037
```

なんだか 1 より微妙に大きい値に収束するように思える。**PowerShell** では有効桁数に限界があるし、関数 `pow(a, b)` による指数計算はおそらく対数を用いて計算している。その理由は、この旅の最後に分かるはずだ。

そのような訳で、本当の値を知りたければ、π の計算で用いた配列を使う手法に頼らざるを得ない。さらに、Δx が負の値から 0 に近づく場合の検証も必要だ。しかし、旅を急ぎたいので結論を述べてしまおう。実は、

$$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \to 1 \quad (\Delta x \to 0)$$

である。もし $\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} \to 1$ であるなら、微分の定義から計算している式の続きは

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = e^x \quad (\Delta x \to 0)$$

ということになる。あれ？　微分したのに変化しないぞ。

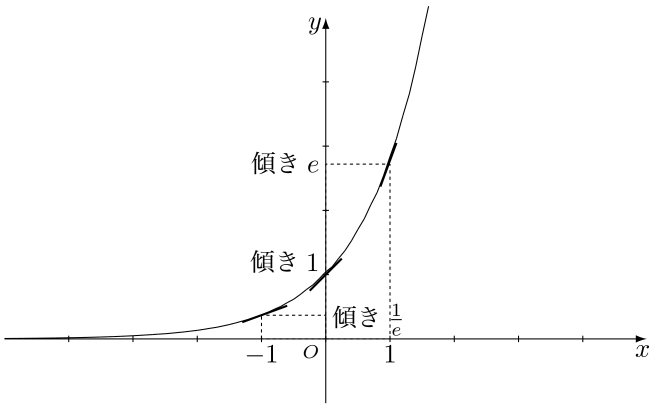
ちょっと不思議なので、少し違う視点でも調べておこう。$y = e^x$ を考える。対数は円周率の旅で見学しているので、これが $x = \log y$ と同値であることはよいだろう。底 e は省略してある。この微分は $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y}$ であることも円周率の旅の見所であった。逆数をとれば $\dfrac{dy}{dx} = y$ であるが、$y = e^x$ だから $\dfrac{dy}{dx} = e^x$ である。やっぱり微分しても同じ式なんだ。

□ e^x **の微分**

- $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

どうしてなんだろう。そもそも微分をすることは、何を求めているのだろうか。円周率を旅したとき、平均変化率をもとに微分の考えに発展させたことは覚えているね。平均的な変化量は直線の**傾き**であった。Δx の幅を小さくすれば傾きも変化するが、それは次第に接線の傾きに近づいているのだ。すなわち、$\Delta x \to 0$ の状態では、平均変化率と接線の傾きは同じものを指している。微分した関数のある x に対する値は、もとの関数の x における接線の傾きを表すのである。

ということなら、e^x を微分しても e^x である理由は明快だ。微分した $y = e^x$ の x に対する y の値は、もとの関数 $y = e^x$ の x における接線の傾きでもあるのだ。これは他に類を見ない、なかなかよい性質である。



ところでグラフをじっくり見てもらいたい。グラフは x 軸の左へ向かってなだらかに伸びている。この様子では x 軸の下にグラフがくることはない。それは式からも分かる。$x = -n$ として $e^{-n} = \dfrac{1}{e^n}$ を考えると、分母はいくらでも大きくなるけれど、その逆数は $(0.000\cdots$ 何とか$)$ で決して負の値にならない。なのに、いま私たちが旅している $e^{i\pi}$ の値は -1 なのだ。一体どうなっているんだろう。順調に旅を続けていたのに、急

に迷路に迷い込んでしまったような雰囲気になってきた。でも大丈夫。もうしばらく進むと、標識だらけの——いささか乱立気味の——道路に出るだろうから。