3 自然対数の底

e の正体を知るためには対数関数 $y = \log_a x$ の微分を話題にしなくてはならない。微分の定義

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\Delta x \to 0)$$

にしたがって計算しておこう。

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) \quad (\text{分子に性質} \log M - \log N = \log\frac{M}{N}\text{を用いた}) \\ &= \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\end{aligned}$$

ここで計算の見通しをよくするため、$\dfrac{\Delta x}{x} = h$ とおいてみよう。この置き換えで $\Delta x \to 0$ のとき $h \to 0$ であることに注意した上で、$\dfrac{1}{\Delta x}$ にちょいと手を加えて

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{h}\log_a(1+h) \\ &= \frac{1}{x}\log_a(1+h)^{\frac{1}{h}} \quad (\text{性質 } k\log M = \log M^k\text{を用いた})\end{aligned}$$

となることが分かる。問題は $h \to 0$ のとき $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ がどうなるかだ。**PowerShell** の出番である。

[ps script]

```
PS C:\Users\Yours > @"
>> [math]::pow(1.1, 10)
>> [math]::pow(1.001, 1000)
>> [math]::pow(1.00001, 100000)
>> [math]::pow(1.0000001, 10000000)
>> [math]::pow(1.000000001, 1000000000)
>> [math]::pow(1.00000000001, 100000000000)
>> "@ > test.ps1
>>
PS C:\Users\Yours > ./test
2.5937424601
2.71692393223559
2.7182682371923
2.71828169413208
2.71828205201156
2.71828205335711
```

何となく一定の値に**収束**するように思える。しかし、こういった検証をする場合、これでは不十分である。理由は $h \to 0$ が必ずしも正の値から 0 に近づくとは限らないからである。もし負の値から 0 に近づくなら、$\frac{1}{h}<0$ である。記述の約束では、指数の負値は逆数を意味したので、その場合は違った値になる可能性がある。念のため調べておこう。実はそのために、ヒア文字列を使って変数へ代入する代わりにファイルに出力したことに注意してほしい。この程度のテキストなら入力もさほど苦にならないだろうが、`10...` の前に `-` をつけるだけのところもあるので、ファイルに保存して修正することで手間を省いたつもりなのだ。

[ps script]

```
PS C:\Users\Yours > @"
>> [math]::pow(0.9, -10)
>> [math]::pow(0.999, -1000)
>> [math]::pow(0.99999, -100000)
>> [math]::pow(0.9999999, -10000000)
>> [math]::pow(0.999999999, -1000000000)
>> [math]::pow(0.99999999999, -100000000000)
>> "@ > test.ps1
>>
PS C:\Users\Yours > ./test
2.86797199079244
2.71964221644285
2.71829541998041
2.71828196294237
2.71828175293993
2.71828205338429
```

どうやら似たような値に収束するらしい。それも有理数でない数に。こんなときにとるべき道はひとつで、円周率同様この値を文字で表す以外にない。この極限値は e で表すことにする。e は**自然対数の底（てい）**と呼ばれ、$e = 2.718281828459045\cdots$ である。**PowerShell** にさせた計算は若干大きめの値を示しているようだ。おそらく、有効桁数の限界か `pow` 関数の仕様が影響しているのだろう。

さて、これで $\log_a x$ を微分することができた。

$$(1+h)^{\frac{1}{h}} \to e \quad (h \to 0)$$

ということなので、$\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{1}{x}\log_a e$ である。とくに $a=e$ の場合、関係式は非常に分かりやすい形になる。$\dfrac{1}{x}\log_e e = \dfrac{1}{x}$ になるからだ。余計な説明かもしれないが、$e^1 = \underline{e}$ に対数の定義を当てはめると $\log_e \underline{e} = 1$ だからである。一般に $\log_a a = 1$ である。さらに $a^0 = 1$ より $\log_a 1 = 0$ も分かる。このことは、旅の後半で使うので覚えておいてほしい。

私たちは 10^n を基本にして計算しているので、a の値を 10 とすることが多い。その場合、$\log_{10} x$ の微分は

$\dfrac{1}{x}\log_{10} e$ である。これは少々煩わしい。そのため、微分の計算が簡略化できるように、対数の底は 10 より e を優先するのが習慣となっている。もし、$\log x$ のように底が省略されたときは $\log_e x$ であると約束しておきたい。

□ $\log x$ **の微分**

- $\dfrac{d}{dx}(\log x) = \dfrac{1}{x}$
- 底が e でない場合は $\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{1}{x}\log_a e$
- $\log_a a = 1$、 $\log_a 1 = 0$

---

e の正体が見えてきたのは収穫であるが、だからといって $e^{i\pi}$ の計算にメドがたったわけではない。新たな視点が必要だ。