2 複素数

どんな数 x をとってきても、それを 2 乗すれば正の数になる。この表現の不備を突くとすれば $x=0$ を持ち出すとよい。曖昧さを避けるなら数式を用いて

$$\text{すべての } x \text{ について } x^2 \geq 0$$

とでも書いておこう。この常識の中では、方程式 $x^2=-1$ に解はない。

しかし、それは私たちの認識不足である。たとえば、有理数どうしで加・減・乗・除の計算をすれば結果も有理数である。このことから、すべての有理数の四則計算の結果は有理数である、という常識が成立する。ところがこの常識の中では、方程式 $x \times x = 2$ に解はない。明らかに認識不足である。れっきとした解、$x=\pm\sqrt{2}$ があるじゃないか。

そう、$x^2=-1$ には解がある。それは $x=\pm i$ である。$x \times x = 2$ の解を有理数に求められないとき新たな記号 $\sqrt{\ }$ を使ったように、i は**実数**に解を求められないときに使う "単位" である。正確には**虚数単位**という。記号でなく単位というのは、$i \times i = -1$ となり、$(-) \times (-) = (+)$ のような符号の性質に似ているからだろう。もし、$x^2=-1$ を機械的に解けば $x=\pm\sqrt{-1}$ と書けるので $\sqrt{-1}=i$ ということになる。

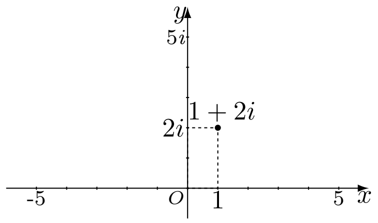
□ 指数計算の性質

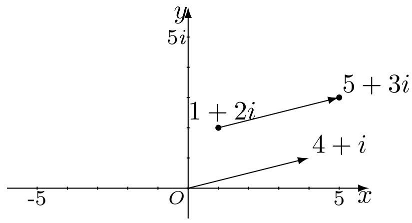
- $i^2=-1$ なる i を虚数単位という
- $\sqrt{-1}=i$
- $i^2=-1, \quad i^3=-i, \quad i^4=1, \quad i^5=i, \quad i^6=-1, \quad \ldots$

これで大抵の方程式は解けるようになる。$x^2=-4$ ならば $x=\pm 2i$、$x^2=-5$ ならば $x=\pm\sqrt{5}\,i$ という具合だ。また、$\sqrt{2}$ は正真正銘の数であるが、$1+2=3$ のように混ぜて計算結果を出すことはできない。$1+\sqrt{2}$ は $1+\sqrt{2}$ 以外の何ものでもない。ただし、$\sqrt{2} \approx 1.4142135$ なので $1+\sqrt{2} \approx 2.4142135$ という値に直すことはできるし、$\sqrt{2}+\sqrt{2}$ なら $2\sqrt{2}$ と書いてよい。$a+a=2a$ と書けるように、一般に $a\sqrt{k}+b\sqrt{k}=(a+b)\sqrt{k}$ である。

同様に、虚数単位がついた数は実数と混ぜて計算できない。$1+2i$ は $1+2i$ 以外の何ものでもない。しかも、i は実数ではないので小数で表そうにも表せない。一般に $a+bi$ の形で表される数を**複素数**という。もし $b=0$ なら a そのものだから、実数は複素数の一部と考えてよい。

では、$1+2i$ はどの程度の数なのだろう。それを知るには、実数を表す数直線のようなものが必要である。複素数を表すには**複素平面**が使われる。それは実数目盛り$\ldots, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$をもつ**実数軸**と、$\ldots, -i, 0, i, 2i, 3i, \ldots$をもつ**虚数軸**を交差させて作る。



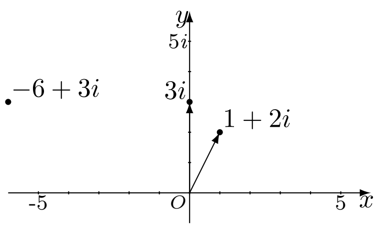


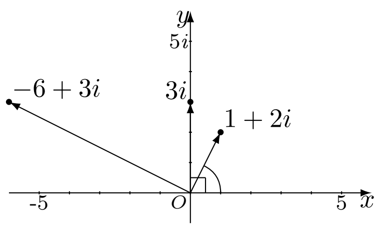
図は、“数”$1+2i$ の場所を示している。先ほど、複素数は実数と混ぜた計算はできないと書いたが、複素数の計算では、実数どうし、複素数どうしの混ぜ合わせは可能だ。たとえば、$(1+2i)+(4+i)=5+3i$ のように。数直線上の数にも言えることだが、数は点で表すことも矢線（**ベクトル**）で表すこともできる。そして、ベクトルの継ぎ足しが足し算となる。それは複素数も同じで、$1+2i$ に $4+i$ を継ぎ足した結果、$5+3i$ が図示されたことになる。

$i^2=-1$ であることを使えば、複素数の掛け算も定義できる。たとえば

$$(1+2i)\cdot 3i = 3i + 6i^2 = -6+3i$$

のような計算が可能だ。





$1+2i$ に $3i$ を掛けた数を複素平面に示すと、思わぬ場所に積が現れる。一体、どうなっているのだろう。結論から言うと、複素数には大きさというものがある。$a+bi$ の大きさは $\sqrt{a^2+b^2}$ である。これより、$1+2i$ と $3i$ の大きさはそれぞれ $\sqrt{5}$、3 で、その積 $3\sqrt{5}$ は $-6+3i$ の大きさに等しい。少なくとも、大きさに関しては実数と同じ感覚で計算してよい。

□ **複素数の計算**

- $(a+bi)\pm(c+di)=(a+c)\pm(b+d)i$
- $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$
- $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$　（ただし $|x|$ は x の大きさを表す）

積があさっての方向へ飛んだのには理由がある。複素数をベクトルとして見ると、x 軸との間に何らかの角度を持つ。$1+2i$ は $63°$ ほどで $3i$ はちょうど $90°$ である。$-6+3i$ が x 軸となす角はおよそ $153°$ で、これは 2 つのベクトルのなす角の和になっている。なぜ、そうなるのだろう。

複素数を点と見れば、$a+bi$ は座標を用いて $(a,\ b)$ と書いてもよい。同時に複素数はベクトルと見てもよ

い。ベクトルとして見ると、複素数の位置を決定づける見方を、ベクトルの大きさ r と x 軸となす角 θ に見直すことができる。θ の単位は "度" でなく、半径 1 の円周で測る "弧と半径の比" である。したがって $(a,\ b) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ という関係が成り立つ。

□ **複素数の 2 つの見方**

- 座標の見方とベクトルの見方

2 つの複素数を、ベクトルの大きさとなす角を用いた表記 $p\cos\alpha + i \cdot p\sin\alpha = p(\cos\alpha + i\sin\alpha)$、$q\cos\beta + i \cdot q\sin\beta = q(\cos\beta + i\sin\beta)$ で考えよう。このとき 2 数の積は、$i^2 = -1$ に気をつけて

$$\begin{aligned} p(\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot q(\cos\beta + i\sin\beta) &= pq\{(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)\} \\ &= pq\{\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\} \end{aligned}$$

と変形することができる。最後は三角関数の加法定理を用いてまとめたことに注意してほしい。これを見れば、たしかに複素数の積は、大きさの積と x 軸となす角の和であることが分かる。

これで何となく i の正体らしきものが見えてきたけれど、$e^{i\pi}$ が何になるかはまったく霧の中である。$^{i\pi}$ が有理数 $\frac{m}{n}$ でない限り $(\sqrt[n]{e})^m$ の計算はできないのだが、$i\pi$ は有理数のようではない。多少行き詰まりの感があるけれど、次は e が何なのか述べておきたい。